INMACULADA GALLASTEGUI*

Criterios para el contraste de intervenciones deterministas en series temporales

INTRODUCCION

El problema que nos ocupa es el de intentar contrastar cambios mantenidos en la media de series temporales que respondan a realizaciones de procesos estocásticos lineales, del tipo:

$$\varphi(B)\, X_t = \theta(B)\, a_t \qquad t = 1,T$$

en el que X_t es la variable relevante o una transformación de las misma, a_t es un proceso de ruido blanco, y $\varphi(B)$ y $\theta(B)$ son polinomios en el operador de retardos B, de orden P y q respectivamente.

Supongamos que la serie observada corresponde al proceso:

$$\varphi(B)\, X_t = \theta(B)\, a_t \qquad t < T_1$$

$$\varphi(B)\, X_t = k + \theta(B)\, a_t \qquad t \geq T_1$$

Supondremos que las raices de los polinomios $\varphi(B)$ y $\theta(B)$ están fuera del círculo unidad, con lo que el proceso es estacionario salvo en media, e invertible. La no estacionariedad del proceso resultante vendrá dada por el cambio en media, k. Este cambio en media supondremos que ha sido producido por una intervención determinista, y nos referiremos a él como el efecto de intervención, o, simplemente, intervención.

* Inmaculada Gallastegui, Universidad del País Vasco, Septiembre 1981.

La función de convarianzas teórica del proceso no acusará presencia de no estacionariedad, al no contener información sobre la media del mismo, puesto que

$$\gamma_k = E(x_t - Ex_t)(x_{t-k} - E(x_{t-k})) \qquad \text{y}$$

$$E(x_t) = 0 \qquad t < T_1$$

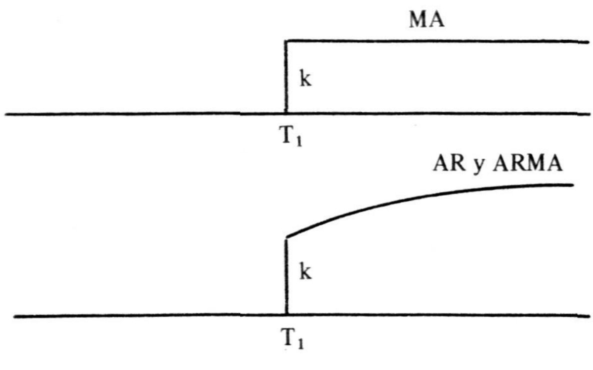
$$E(x_t) = k \qquad t \geqslant T_1$$

Si consideramos la realización del proceso para observaciones (0,T) siendo $T_1 + T_2 = T$, el correlograma estimado sí denotará presencia de no estacionariedad, puesto que

$$\gamma_k = \frac{\sum_{k+1}^{T} (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})}{\sum_{1}^{T} (x_t - \bar{x})^2} \qquad \bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{1}^{T} x_t$$

con lo que el correlograma estimado decrecerá lentamente.

Dado que el proceso presentado es estacionario, salvo por el salto en media, es de esperar que el gráfico de la serie muestre este cambio en media, cuyo efecto neto, según el tipo de proceso lineal de que se trate, será



dependiendo la evolución posterior de la media, en el caso de procesos AR y ARMA, del orden y magnitud de los coeficientes del polinomio $\varphi(B)$.

En todo caso, y dado que estamos suponiendo que las raices del polinomio son superiores a la unidad, la media se estabilizará al cabo de un cierto número de periodos, en un valor superior o inferior a K según que las raices del polinomio sean positivas o negativas.

II. CONTRASTE

Diversos autores se han ocupado de este tema. En el contexto del análisi de regresión, Brown, Durbin y Evans(1), Maronna y Yohai(2), etc. En el contexto de modelos lineales como los aquí presentados, Johnson y Bagshaw(3), (4), (5), proponen un contraste basado en sumas acumulativas, CUSUM, desarrollando el contraste de Page(6) para observaciones correlacionadas, proponiendo el caso general en que cualquiera de los parámetros del modelo varie. Chalmona(7) propone un contraste basado en la razón de verosimilitud para el caso de un proceso autoregresivo de orden conocido suponiendo que el momento en que se produce el cambio en media sea desconocido.

En nuestro caso, y dado que suponemos conocido el momento en que se produce la intervención, el contraste de razón de verosimilitudes sería obvio en caso de que conocieramos la estructura básica del modelo que haya generado la serie. El problema está en que, como se ha indicado ya, el correlograma estimado se ve afectado por la presencia de intervención, por lo que el contraste deseado debería realizarse antes de identificar un modelo definitivo. El contraste propuesto por Bagshaw y Johnson en (5) depende también de una identificación previa del modelo que indique la forma de la autocorrelación entre los valores de la variable.

El contraste que proponemos aquí se basa en los siguientes pasos:

a) Localización, a partir del análisis gráfico, del momento en que se produce la intervención.

b) Identificación inicial de un modelo a partir de los datos de la serie pre-intervención; en caso de que el proceso original fuera MA, un modelo del mismo tipo debería ser identificado de las observaciones posteriores a la intervención. En un proceso AR o ARMA esto no puede decirse, ya que depende del número de periodos necesario para que la media se estabilice.

A partir de aquí, el contraste procedería de la siguiente forma, haciendo uso del siguiente Teorema:

Teorema: Si $y_t = \mu + \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_s \upsilon_{t-s}$

donde υ_t consiste en variables aleatorias mutuamente independientes e identicamente distribuidas con $E(\upsilon_t) = 0$, $E(\upsilon^2_t) = \sigma^2$,
y si $\sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_t| < \infty$, entonces

$\sqrt{T}\,(\bar{y} - \mu)$ tiene una distribución asintóticamente normal, con media cero y varianza

$$\sigma^2 \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_s \right)^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \sigma(\gamma)$$

donde

$$\sigma(\gamma) = \sigma^2 \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_s \gamma_s + \tau \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{1}^{T} y_t}{T}$$

(Teorema 8.4.1 en Anderson(7)).

Supongamos dos procesos aleatorios

$$\left\{ y_{1t} \quad t = 1, 2 \ldots \right\} \qquad \left\{ y_{2t} \quad t = 1,2 \ldots \right\}$$

ambos m-dependientes, que pueden ser especificados

$$y_{1t} = k_1 + \sum_{o}^{m} \theta_i\, a_{t-i}$$

$$y_{2t} = k_2 + \sum_{o}^{m} \theta_i\, a_{t-i}$$

Dado que

$$\bar{\bar{y}}_1 = \sum_{1}^{T1} \frac{y_{1t}}{\sqrt{T_1}} \;\tilde{a}\; N(\mu_1, \sigma^2_{\bar{\bar{y}}1})$$

$$\bar{\bar{y}}_2 = \sum_{1}^{T2} \frac{y_{2t}}{\sqrt{T_2}} \;\tilde{a}\; N(\mu_2, \sigma^2_{\bar{\bar{y}}2})$$

con $\mu_i = \sqrt{T_i} \cdot k_i \qquad i = 1 \cdot 2$

Basándonos en el teorema anterior, la diferencia de medias, en el caso de procesos independientes, puede contrastarse a través de

$$(\bar{\bar{y}}_1 - \bar{\bar{y}}_2) \quad \tilde{a} \quad N(\mu_1 - \mu_2,\ 2\sigma_{\bar{\bar{y}}}{}^2)$$

puesto que los dos procesos tienen únicamente diferencia en la media.

Aplicando este resultado al caso que nos ocupa, la parte preintervención del proceso correspondería a la muestra 1, y la parte port-intervención a la muestra 2. Obviamente ambas muestras no son independientes. Sin embargo, la identificación inicial a que hemos hecho referencia en el punto (b) puede servirnos para establecer el orden de dependencia del proceso, esto es, el punto en que se trunca el sumatorio que aparece en el Teorema anterior. En caso de un proceso MA, la información es inmediata. Para procesos AR o ARMA el modelo identificado puede estimarse para las primeras (T-1) observaciones, utilizándose los valores de los coeficientes estimados para determinar una aproximación al orden de dependencia.

Una vez conocido este valor, m, es suficiente con eliminar tantas observaciones como (m + 1) de la muestra post-intervención para que ambas muestras puedan ser consideradas independientes y el contraste propuesto sea válido.

El contraste sería entonces el de la hipótesis

$H_o : \mu_1 - \mu_2 = 0$

y el estadístico a utilizar $\dfrac{\bar{\bar{y}}_1 - \bar{\bar{y}}_2}{\sigma_{\bar{\bar{y}}} \sqrt{2}}$

que bajo la hipótesis nula, tiene una distribución asintóticamente normal, con media cero y varianza unidad.

La varianza $\sigma^2_{\bar{\bar{y}}}$ puede estimarse consistentemente a través de

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{\bar{y}}} = 2 \sum_1^{m-1} c^*_n + c^*_o$$

$$\text{donde } c^*_n = \frac{1}{T-n} \sum_1^{T-n} (x_t - \bar{x})(x_{t+n} - \bar{x})$$

es un estimador consistente de COV $(x_j - x_n)$. (Anderson (1) Teorema 8.4.2.)

Si el contraste denotara un cambio en media significativo, este hecho puede ser tenido en cuenta desde el primer momento, incluyendo la intervención en el modelo propuesto.

III. Aplicacion empirica

La serie a estudiar en este caso consiste en porcentaje de alumnos que han aprobado anualmente exámenes de niveles superior y medio entre 1879 y 1971 en Irlanda. La serie consiste, pues, en 93 observaciones sucesivas, y su representación gráfica aparece en el gráfico 1.

Se aprecia en la serie un corte brusco en su evolución alrededor de la observación 50. Efectivamente, en 1925 (obs.47) se produjo un cambio institucional en la educación, pasando los exámenes aquí analizados a depender de una autoridad distinta. El corte de la serie puede entonces explicarse por el cambio institucional, que según esta explicación habría comenzado a tener efecto alrededor de tres períodos después de producirse.

Interesa, entonces, determinar si esta posible intervención exógena ha tenido o no efecto significativo en la evolución de la serie, o si debería explicarse ésta de otra manera.

El gráfico de la serie podría indicar la posibilidad de un proceso autorregresivo subyacente, en el que la intervención produce un cambio de nivel creciente que tiende a estabilizarse, tal como hemos visto ocurre en dichos procesos. Si esta hipótesis es razonable, debería ser posible identificar un proceso A.R. de la parte de la serie que no haya sufrido intervención; en este caso, puesto que el cambio de nivel se mantiene en todas las observaciones posteriores a 1927, las observaciones a utilizar para esta primera identificación serían únicamente las 46 primeras.

Efectivamente, los correlogramas simple y parcial de dicha submuestra, que aparecen en el gráfico 2, parecen los de un proceso A.R. (1), por lo que se ha estimado el modelo

$$(1 - \phi B)x_t = \mu + a_t \qquad t = 1,46$$

con el siguiente resultado:

$$\underset{(0,12)}{(1 - 0,55B)}\, x_t = \underset{(1,56)}{59,96} + a_t \qquad s_e = 4,889 \quad Q_{20} = 7,140$$

GRAFICO 1

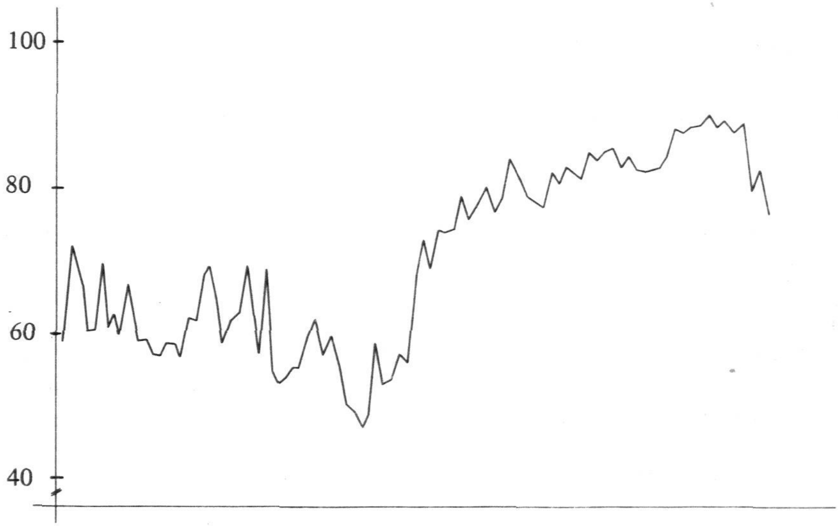
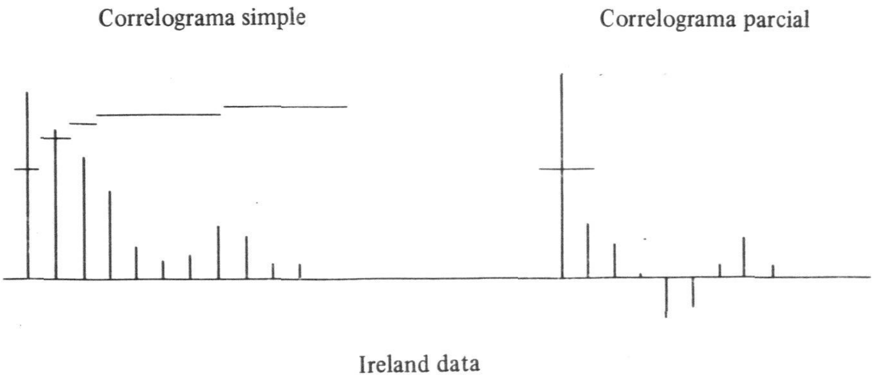


GRAFICO 2



Ireland data

primera parte

t = 1,46

Este modelo pasa convenientemente los contrastes habituales, por lo que podemos utilizarlo como base para el contraste de la intervención.

Un modelo A.R.(1) puede ser escrito, como sabemos, como media móvil infinita, lo que en este caso supondría:

$$x_t = (1 + 0{,}55B + 0{,}30B^2 + 0{,}16B^3 + 0{,}09B^4 + 0{,}05B^5 + 0{,}027B^6 + 0{,}01B^7 + 0{,}008B^8 + \dots)a_t$$

Truncando el proceso a partir del séptimo término, obtendríamos un proceso 7-dependiente, con el que trabajaremos.

Para obtener dos muestras independientes deberemos eliminar un mínimo de 7 observaciones, por lo que eliminaremos las 4 previas a la intervención y las 4 posteriores a la misma.

Así, la primera submuestra se compondrá de las observaciones 1 a 42, y la segunda de las observaciones 51 a 93.

Las medias de las respectivas submuestras son:

$\bar{y}_1 = 60{,}83$ $\bar{y}_2 \doteq 82{,}30$

con lo que

$\bar{\bar{y}}_1 = 394{,}24$ $\bar{\bar{y}}_2 = 539{,}69$

Al ser un proceso 7-dependiente, la varianza de $\bar{\bar{y}}$ vendrá dada por:

$$\sigma_{\bar{\bar{y}}}^2 = \mathrm{var}\,(y) + 2 \sum_{j=o}^{6} \mathrm{cov}\,(x_j\,,\, x_7)$$

Utilizando los estimadores consistentes mencionados en el capítulo 3, obtendremos la siguiente estimación de $\sigma^2_{\bar{\bar{y}}}$ para la primera parte de la serie:

$s^2_{\bar{\bar{y}}} = 83{,}89$ $s_{\bar{\bar{y}}} = 9{,}15$

Con lo que la hipótesis nula:

$H_o: \mu_1 - \mu_2 = 0$ se contrasta a través del estadístico

$$\frac{\bar{\bar{y}}_1 - \bar{\bar{y}}_2}{S_{\bar{\bar{y}}}\sqrt{2}} = \frac{394,24 - 539,62}{9,15 \cdot \sqrt{2}} = 11,29$$

que, al ser superior al valor de una variable normal al nivel de significación 0,05 nos lleva a rechazar la hipótesis nula.

Una vez admitida la presencia de intervención significativa, el modelo propuesto apra toda la series es:

$$(1 - \phi B)x_t = \mu + \omega_o B^3 \xi_t + a_t$$

$$\text{donde } \xi_t = \begin{cases} 0 & t < 47 \\ 1 & t \geqslant 47 \end{cases}$$

que da los siguientes resultados, una vez estimado:

$$\underset{(0,07)}{(1 - 0,703\,B)}x_t = \underset{(1,92)}{61,13} + \underset{(2,50)}{19,39}\,\xi_t + a_t \qquad [2]$$

$s_e \doteq 4,0983 \qquad Q_{36} = 25,02 \qquad \bar{e}/s_{\bar{e}} = 0,000004$

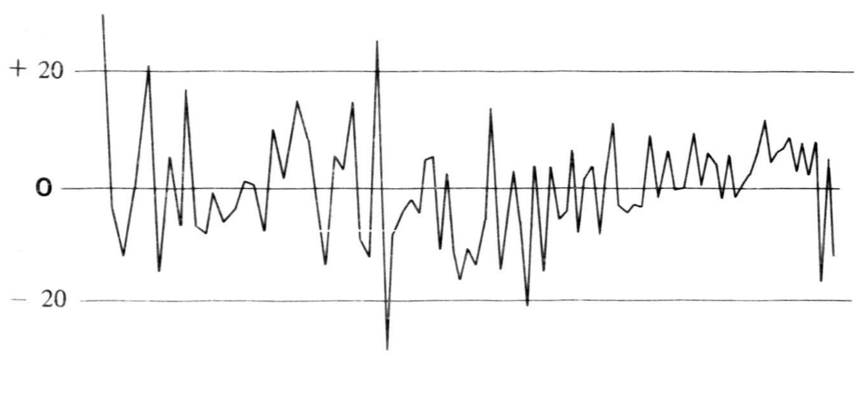
No existe correlación significativa entre los residuos, que aparecen representados en el gráfico 3. La introducción de la variable ficticia ξ_t parece recoger adecuadamente el salto que se aprecia en la serie. La correlación entre los parámetros μ y ω_o es de -0.659, provocada por el hecho de que el programa utilizado no acepta la no inclusión de media determinista si no se toman diferencias. Estimaciones realizadas usando la serie centrada alrededor de la media producen resultados sustancialmente iguales.

IV. Series no estacionarias

Tanto éste como los demás contrastes mencionados son válidos únicamente para procesos estacionarios. En la realidad, la mayor parte de las series que se tratan son no estacionarias, presentando algún tipo de evolución en media que se corrige tomando diferencias. Por supuesto, una intervención que provoque un cambio constante en la media quedará reducida al efecto en un único período de tiempo cuando la serie intervenida se haya diferenciado una vez. Esto significa que en series originalmente no estacionarias difícilmente quedará, en el modelo adoptado tras transformar la serie, una influencia sustancial de la intervención que pueda ser objeto de contraste. Es lógico, entonces, que la modelización de la intervención se haga a través del análisis de residuos, tal que es habitual, en lugar de hacerlo a priori, como parecería más razonable. Queda, sin embargo, pendiente el problema de hasta qué punto el filtrado de la serie a través de diferencias viene exigido en su mayor parte por la presencia de intervenciones no detectadas, lo que puede producir especificación inadecuada de los modelos. El hecho de que la teoría estadística actualmente disponible tenga muy poco que decir de procesos no estacionarios, aparte de diagnosticar el problema. parece poner un límite al tratamiento sistemático de este tema.

GRAFICO 3

Residuos del modelo (2)



APENDICE I

Serie de datos de Irlanda (Apartado C)

Obs.	1-25	26-50	51-75	76-93
	59.0	63.3	73.8	83.6
	72.0	68.9	69.7	85.0
	67.2	63.0	74.6	83.2
	60.5	57.5	74.2	82.8
	60.7	69.2	74.4	83.2
	69.7	55.3	79.2	85.0
	61.2	53.7	76.3	88.7
	63.3	54.3	78.3	88.3
	60.0	55.7	80.8	88.7
	67.5	55.6	77.3	89.3
	63.0	59.4	79.3	90.5
	59.2	62.4	84.4	89.0
	59.6	57.7	82.0	90.0
	57.7	60.1	79.8	88.2
	57.3	55.7	78.8	89.5
	58.9	50.8	78.0	80.0
	59.8	49.5	82.6	82.5
	57.0	47.6	81.2	77.0
	62.4	49.4	83.7	
	62.1	58.9	82.6	
	68.3	53.4	81.9	
	69.8	54.0	85.6	
	65.7	57.6	84.3	
	58.9	56.2	85.7	
	62.1	68.6	86.0	

Esta serie ha sido tomada de la obra de Glass, Willson y Gottman "Design and analysis of time series experiments", Colorado Associated University Press, 1975. Su procedencia original viene debidamente referenciada en la citada obra.

REFERENCIAS

1 - ANDERSON, T.W.: "The Statistical analysis of time series", *Wiley,* 1971.

2 - BAGSAW, M. y JOHNSON, R.A.: (1975) "The effect of serial correlation in the performance of cussum tests II", *Technometrics,* vol.17 nº1.

3 - BAGSAW, M. y JOHNSON, R.A.: (1977) "Sequential procedures for detecting parameter changes in a time series model", *J.A.S.A.,* vol.72, nº 359.

4 - BROWN, R.L., DURBIN, J. y EVANS, J.M.: (1975) "Techniques for testing the constancy of regresion relationships over time", *J.R.S.S.* Serie B nº2.

5 - CHALMOND, B.: (1981) "Detection d'une rupture de moyenne en un point inconnu d'un procesus ARMA" *Review de Statistique Apliqueé,* vol. XXIX, nº 1.

6 - JOHNSON, R.A. y BAGSHAW, M.: (1974) "The effect of Serial correlation on the performance of cusum tests", *Technometrics,* vol.16 nº1.

7 - PAGE, E.S.: (1955) "A test for a change in a parameter occurring at an unknown point", *Biometrika,* 42.